

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{b^2 + ab} - \frac{a - b}{a^2 + ab}\right) : \left(\frac{b^2}{a^3 - ab^2} + \frac{1}{a + b}\right)$$

и найдите его значение при $a = 84; b = 162$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{13}{27}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{13}{14}$ E) нет правильного ответа

2. Найдите натуральное число, заданное выражением

$$\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{11})\sqrt{16 + 2\sqrt{55}}}{1 - \sqrt{9}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) нет правильного ответа

3. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

A) 1 B) 9 C) 99 D) 101 E) нет правильного ответа

4. Решите уравнение

$$(x^2 - 3x)^2 - 14x^2 + 42x + 40 = 0$$

В ответе укажите сумму всех найденных решений.

A) -12 B) -3 C) 6 D) 12 E) нет правильного ответа

5. Найдите множество решений неравенства

$$\frac{(x + 1)^3(-x^2 - 2x + 8)}{(x + 1)(x + 3)} \leq 0$$

A) $(-\infty; -4] \cup (-3; -1) \cup (-1; 2)$ B) $[-4; -3] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$ C) $[-4; -3] \cup [2; +\infty)$
D) $(-\infty; -4] \cup (-3; -1) \cup [2; +\infty)$ E) нет правильного ответа

6. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x^2 + 3x - 4} \geq 0$$

В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в решение этого неравенства.

A) -2 B) 3 C) 4 D) 5 E) нет правильного ответа

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 - 2x - 2y \\ x + y + 5 = -xy \end{cases}$$

В ответе укажите сумму координат всех решений. Например, если $(1; 2)$ и $(3; 4)$ — решения системы, то в ответе нужно указать $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

A) -6 B) -3 C) 2 D) 4 E) нет правильного ответа

8. Область задана на плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ y^2 \leq 4 \\ y \geq |x| \end{cases}$$

Найдите её площадь.

A) $4 - \pi$ B) $8 - \pi$ C) $4 - 2\pi$ D) $8 - 2\pi$ E) нет правильного ответа

9. Найдите область определения функции

$$y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{-\sqrt{-x+7}}{-2x^2 + 17x - 8} \right)$$

A) $(\frac{1}{2}; 7)$ B) $(8; +\infty)$ C) $(-\infty; 7]$ D) $(-\infty; \frac{1}{2})$ E) нет правильного ответа

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

A) $\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{2}$ E) нет правильного ответа

11. Найдите $\cos(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha)$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

A) $-\frac{24}{25}$ B) $-\frac{7}{25}$ C) $\frac{7}{25}$ D) $\frac{24}{25}$ E) нет правильного ответа

12. Прямая l задана на плоскости уравнением $3y - 4x - 5 = 0$. Укажите уравнение прямой, перпендикулярной прямой l и проходящей через точку $A(2; -1)$.

A) $4y - 3x + 10 = 0$ B) $4y + 3x - 2 = 0$ C) $-\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}x - \frac{5}{6} = 0$
D) $-\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5} = 0$ E) нет правильного ответа

13. График функции $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$ сдвинули на 2 единицы влево и на 3 единицы вниз, получив при этом график функции $g(x)$. Какой вид может иметь $g(x)$?

A) $3x^2 - 10x + 77$ B) $3x^2 - 6x + 5$ C) $3x^2 - 10x + 83$
D) $3x^2 - 6x + 11$ E) нет правильного ответа

14. a_n — возрастающая арифметическая прогрессия, причем $a_1 > 0$. Найдите a_4 , если $a_2a_6 = 105$ и $a_3a_5 = 117$.

A) 7 B) 11 C) 13 D) 17 E) нет правильного ответа

15. Укажите вариант ответа, в котором перечислены все верные утверждения:

- (a) Для любого треугольника центр вписанной в него окружности совпадает с центром описанной вокруг него окружности;
- (b) Диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;
- (c) Биссектрисы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

A) a B) a, b C) b, c D) b E) нет правильного ответа

16. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD \parallel BC$ диагонали пересекаются в точке O . Известны площади $S(ABCD) = 32$ и $S(\triangle BCO) = 2$. Найдите площадь треугольника AOD .

A) 6 B) 8 C) 16 D) 18 E) нет правильного ответа

17. Из точки M провели прямую, касающуюся окружности в точке A . Перпендикулярно AM провели секущую, проходящую через точку M . Оказалось, что $AM = 12$, а внутренняя часть секущей равна 10. Найдите радиус окружности.

A) 12 B) 13 C) 17 D) $2\sqrt{61}$ E) нет правильного ответа

18. Отрезки AM и BH – соответственно медиана и высота остроугольного треугольника ABC . Известно, что $AN = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найдите сторону BC .

A) 0,5 B) 1 C) 2 D) 3 E) нет правильного ответа

19. Найдите остаток от деления 2^{100000} на 31.

A) 1 B) 3 C) 13 D) 30 E) нет правильного ответа

20. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + 8x + 2a = 0$ существуют и все принадлежат отрезку $[-6, -3]$?

A) $[6; 8]$ B) $(7, 5; 8]$ C) $[6; 8]$ D) $[7, 5; 8]$ E) нет правильного ответа

21. Функция $f(x)$ определена для $x \geq 0$, причем для любых положительных a и b верно, что $f(ab) = f(a) + f(b)$. Найдите $f(2024)$, если $f(\frac{1}{2024}) = 1$.

A) -1 B) $\frac{1}{2024}$ C) 2024 D) 1 E) нет правильного ответа

22. Решите уравнение

$$||4 - x^2| - x^2| = 1$$

A) нет решений B) $\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\}$ C) $\{\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\}$
D) $\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\}$ E) нет правильного ответа

23. Братья Игорь и Костя привезли в чемоданах сладости на Выездную школу ЭМШ. Когда школа закончилась, оказалось, что общий вес чемоданов братьев за время школы уменьшился на 10%. При этом вес чемодана Игоря уменьшился на 15%, а вес чемодана Кости — на 6%. Известно также, что в конце Выездной школы чемодан Кости весил на 7 кг больше, чем чемодан Игоря в начале школы. Определите первоначальный вес чемоданов Игоря и Кости. В ответе укажите их сумму.

A) 60 кг B) 70 кг C) 80 кг D) 90 кг E) нет правильного ответа

24. Александр вчетверо старше Николая. Сумма их возрастов — 80 лет. Через сколько лет Александр будет втрое старше Николая?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) нет правильного ответа

25. Катя ехала от экономического факультета до пансионата «Фейерверк», а Влад — наоборот. Они встретились, когда Катя проехала 10 км и еще четверть оставшегося ей до пансионата пути, а Влад проехал 20 км и треть оставшегося ему до экономического факультета пути. Какое расстояние между экономическим факультетом и пансионатом «Фейерверк»?

A) 50 км B) 60 км C) 70 км D) 80 км E) нет правильного ответа

26. Школьники, обладающие одинаковой производительностью решения задач, собрались на досуге решить 360 задач по геометрии (каждую задачу решает 1 человек 1 раз). К сожалению, один из школьников приболел, поэтому вместо него задачи отправился решать студент Саша, производительность решения задач которого в три раза больше производительности каждого из школьников. Поэтому каждый школьник в действительности решил на 6 задач меньше, чем планировалось. Все школьники и Саша решали задачи одинаковое время. Сколько школьников в действительности решало задачи?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) нет правильного ответа

27. На вступительных тестах ЭМШ все школьники в аудитории сели так, что за каждой партой их оказалось по двое. Парт, за которыми сидят две девочки, втрое больше, чем парт, за которыми сидят мальчик с девочкой. А парт, за которыми сидят двое мальчиков, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят две девочки. Сколько в аудитории мальчиков, если известно, что девочек там 14?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) нет правильного ответа

28. Преподаватели курса в ЭМШ решили проверить у школьников ДЗ, состоящее из кейса, кроссворда и эссе. Среди 43 школьников курса кейс решили 12, кроссворд — 15, а написали эссе — 12 человек. Кроме того, кейс и эссе сделали 3 человека, эссе и кроссворд — 5 человек, а кейс и кроссворд — 4 человека. Наконец, все 3 задания выполнил только 1 человек. Сколько на курсе школьников, которые вообще не сделали ДЗ?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) нет правильного ответа

29. Кате очень понравилась лекция про чётность и нечётность на одном из курсов в ЭМШ. После пары она записала на доске несколько последовательных натуральных чисел и подсчитала количество четных и нечетных. Оказалось, что 48% чисел на доске — нечетные. Сколько всего четных чисел записано на доске?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) нет правильного ответа

30. Аня выяснила, что подарочных стикеров ЭМШ осталось 525, а книг ЭМШ — 735. Она решила составить из них одинаковые наборы, причем так, чтобы раздать их наибольшему количеству детей и использовать все книги и все стикеры. Сколько наборов сможет собрать Аня?

A) 35 B) 75 C) 105 D) 125 E) нет правильного ответа